MATEMÁTICA: Números racionales

MATERIAL DESTINADO A TALLERISTAS Y DOCENTES PARA EL FORTALECIMIENTO DE LAS TRAYECTORIAS EDUCATIVAS

DIRECCIÓN PROVINCIAL DE EDUCACIÓN PRIMARIA | SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN

acompañar
Puentes de igualdad

DIRECCIÓN GENERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES

MATERIAL PARA TALLERISTAS Y DOCENTES PARA EL FORTALECIMIENTO DE LAS TRAYECTORIAS EDUCATIVAS

Matemática: Números racionales

Sobre el material

El conocimiento del campo numérico Racionales es fundamental para todas y todos los que terminan la escuela primaria. Por tal motivo ha sido incluido en los Contenidos Prioritarios 2020-2021 y ocupa ahora un lugar importante en esta selección de actividades para la intensificación de los aprendizajes.

Hemos seleccionado un conjunto de actividades destinadas a las niñas y los niños que necesitan aprender un poco más sobre el campo numérico de los Racionales y algunas situaciones problemáticas en torno a los mismos, considerando sus diferentes sentidos, así como también sobre cálculos mentales de suma y resta.

La propuesta está organizada a partir de dos niveles de complejización que buscan promover ciertos avances en los contenidos, a través de un recorrido posible que seguramente será enriquecido por otras situaciones a considerar por las y los docentes para ayudar en el avance de los aprendizajes de cada estudiante.

Es importante señalar que, al interior de cada nivel, mientras algunas y algunos estudiantes irán dominando progresivamente ciertos contenidos, otras y otros requerirán sostener por más tiempo el trabajo en torno a determinadas actividades. Dicho de otro modo, los niveles no suponen un grupo de destinatarios homogéneo. También es necesario mencionar que, muy posiblemente, niñas y niños que inicien resolviendo algunas de las propuestas previstas para el primer nivel, en poco tiempo podrán avanzar y comenzar a resolver algunas tareas incluidas en el nivel siguiente; o bien, que algunas y algunos que comenzaron resolviendo propuestas del segundo nivel, requieran de problemas menos complejos para ciertos contenidos, por lo que podría apelarse a la propuesta anterior.

Finalmente, es posible que quienes tengan por delante la responsabilidad de organizar las tareas que se propongan a cada estudiante, encuentren que, por ejemplo, para el trabajo con números naturales tal niña o niño necesita resolver problemas del estilo de las propuestas para el nivel 3, sin embargo en problemas que involucran fracciones necesita enfrentarse a problemas del nivel 1. En otras palabras, los niveles no buscan segmentar contenidos o propuestas, sino señalar cierta progresión sin perder de vista la continuidad. Estos materiales fueron pensados para ser usados con la flexibilidad necesaria para acompañar a cada estudiante.

Sobre el contenido

Los números racionales representan un campo de contenidos que tiene cierta complejidad. Su estudio se inicia en el primer ciclo, a partir de situaciones problemáticas en el contexto de la medida, y continúa durante toda la escolaridad primaria y secundaria.

Es importante que las y los docentes tengan en cuenta que estudiar números racionales produce algunas rupturas respecto de lo que las y los estudiantes vienen aprendiendo sobre los números (naturales), sus usos y funcionamientos. El modo de representación de estos números (con dos números en el caso de las fracciones, con coma en los decimales) representa un cambio fundamental con la escritura de los números naturales. La idea de que “una multiplicación entre números dará como resultado un número más grande” si bien es potente en el campo de los números naturales (excepto para las multiplicaciones por 0 y por 1), no es reutilizable en todos los casos con los números racionales (cuando se multiplica por fracciones o decimales menores que 1, por ejemplo: $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{8}$).

Otra particularidad de los números naturales sobre la que hay que reconocer límites y alcances es “entre dos números consecutivos no hay otro número posible”, sin embargo entre dos números racionales siempre habrá más números debido a la densidad que caracteriza a este campo numérico. Por ejemplo: entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ se encuentran los números $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{10}$, entre muchos otros más. Los problemas con los que se enfrentarán las y los estudiantes pondrán de relieve estas complejidades.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que los números racionales pueden ser escritos de diferentes maneras, o sea, admiten múltiples representaciones *fraccionarias y/o decimales.* Ello implica comprender que $\frac{1}{2}$ puede ser escrito como 0,5 ó 0,50 ó $\frac{3}{6}$ ó $\frac{4}{8}$ ó $\frac{45}{90}$ entre otras representaciones posibles. Entonces, si hubiera que ubicar en una recta numérica estas expresiones, todas ocuparían el mismo punto. También esta diferencia entre los números racionales y los números naturales trae al alumnado algunas complicaciones lógicas y esperables.

Los problemas que se presentan en este documento, no tienen como fin clasificar las fracciones en “propias, impropias, aparentes” sino analizarlas en términos de “menores a 1, iguales a 1 y mayores que 1”. Se enfatiza que esas primeras denominaciones mencionadas no forman parte del currículum de primaria desde el año 2007.

Problematizar estos aspectos del contenido será un trabajo de resolución, reflexión, análisis e intercambio de manera conjunta entre las y los estudiantes del grupo que se deberá llevar a cabo de manera sostenida y progresiva. En el material “Matemática: Números racionales I” se incluye una primera propuesta sobre fracciones. En “Matemática: Números racionales II” se incorpora la segunda propuesta sobre fracciones y el primer abordaje de los números decimales.

A continuación, se presenta una distribución de contenidos tomados del Currículum Prioritario 2020-2021 para cada nivel de complejidad.

Números Racionales I

Las propuestas que se incluyen en este nivel han sido pensadas para estudiantes que están por finalizar 5º año o cursan 6º año y requieren trabajar o volver a trabajar por un tiempo en torno a algunos de los siguientes contenidos:

- Resolver problemas con fracciones de uso frecuente: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1 y $\frac{1}{2}$ y 2 y $\frac{1}{4}$ asociadas a litros y kilos. Fracción de un número.

- Resolver problemas de reparto en los cuales el resultado puede expresarse usando medios, cuartos y octavos.

- Resolver problemas en los cuales las relaciones entre partes o entre partes y el todo pueden expresarse usando medios, cuartos y octavos.

Números Racionales II

Las propuestas que se incluyen en este nivel han sido pensadas para estudiantes que están por finalizar 6º año y requieren trabajar o volver a trabajar por un tiempo en torno a ciertos contenidos.

Expresiones fraccionarias:

- Resolver problemas que involucran tercios y sextos que se puedan resolver por medio de cálculos mentales y luego extendiendo relaciones a quintos y décimos.

- Resolver situaciones de reparto en las que las fracciones permiten expresar el resultado. Relacionar estos problemas con la cuenta de dividir.

- Resolver problemas en los cuales las relaciones entre partes o entre partes y el todo pueden expresarse usando fracciones.

- Resolver cálculos mentales de sumas y restas entre fracciones apelando a fracciones equivalentes. Cálculos mentales de fracción de un número.

Expresiones decimales:

- Explorar números decimales[1] a partir del contexto del dinero y de la medida.

- Analizar el valor posicional en números decimales.

---

[1] En este documento para referirnos a las expresiones decimales de números racionales utilizaremos la expresión "números decimales". Decidimos sostener este modo de mencionarlos dado que así se los reconoce en el sistema educativo

Números racionales I

En este primer nivel se presenta un conjunto de situaciones problemáticas cuya intención es colaborar con las niñas y los niños que deben aprender a reconocer las fracciones como representaciones de números, que deben aprender a usarlas en la resolución de problemas, iniciando con un contexto que puede serles más accesible como lo son las medidas de peso y capacidad (expresadas en kilos y litros).

Es posible vincular lo que se trabajará a partir de este conjunto de actividades, que se denomina "Números racionales I", con lo propuesto en el "Material destinado a estudiantes. Operaciones IV", pues allí se ofrecen algunas situaciones en las que es posible seguir repartiendo el resto de una división. Esos problemas, si ya fueron resueltos por el grupo y usaron estrategias que no incluyeron la división, pueden ser retomados y presentarse la división como opción y, esta vez, aprovechar la ocasión para vincular la resolución de la división con la expresión del resultado mediante fracciones.

Tal como se mencionó anteriormente, al enfrentarse a estas situaciones problemáticas es necesario que las y los estudiantes puedan contar con portadores de información para usar de manera cada vez más autónoma, y que les permitan resolver o comprobar sus resoluciones. Se hace referencia a cuadros o tablas donde tengan registrado un repertorio de cálculos entre fracciones; pero también a la confección de nuevos afiches para el aula o anotaciones para la carpeta con información que se irá elaborando a medida que se resuelvan nuevos problemas y alcancen nuevas conclusiones. En el material para estudiantes se proponen actividades para estos fines bajo títulos como: "**Para resolver entre todas y todos**", "**Para usar lo que aprendieron**", "**Para revisar, comparar y resolver**". Es muy importante señalar que los afiches o recordatorios con información se construyen y difunden luego de haber trabajado lo que allí se presenta.

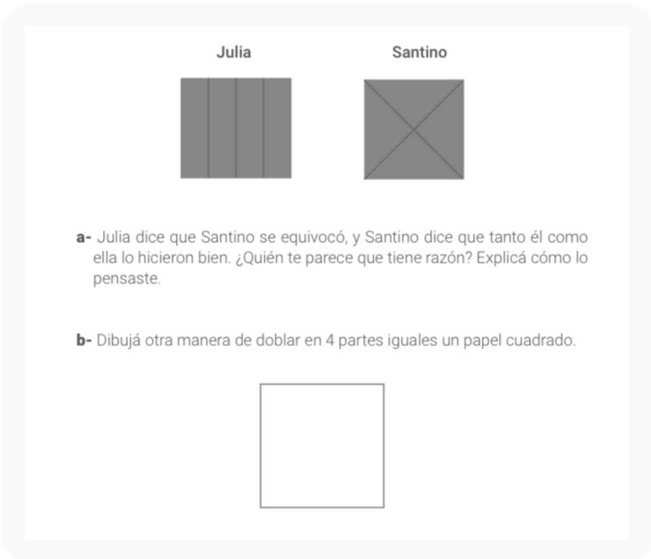
A continuación, se ofrece un análisis de las propuestas de actividades que pretende colaborar con la puesta en aula de dichos problemas, ayudando

[2] Este material se encuentra disponible en el micro sitio del Programa +ATR. Enlace: https://atr.abc.gob.ar/operacionesiv_primaria/

a las y los docentes a pensar el antes y el después de las resoluciones, consignando algunas posibles estrategias de resolución y algunos errores comunes para que puedan anticiparse e intervenir en las clases con la intención de favorecer más aún los aprendizajes de las y los estudiantes.

Las partes del entero

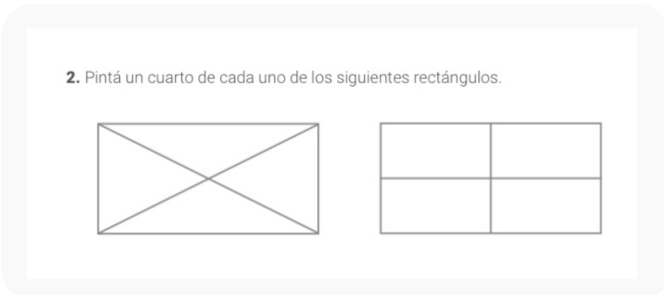
Los primeros problemas que se ofrecen en el material para estudiantes ponen en juego el concepto de particiones en partes iguales a partir de un soporte gráfico, con la intención de que las niñas y los niños puedan comenzar (o retomar) la conceptualización de que las particiones del entero pueden tener diferentes formas y aun así representar la misma fracción.


Julia Santino

a- Julia dice que Santino se equivocó, y Santino dice que tanto él como ella lo hicieron bien. ¿Quién te parece que tiene razón? Explicá cómo lo pensaste.

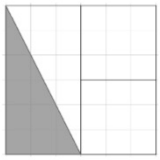
b- Dibujá otra manera de doblar en 4 partes iguales un papel cuadrado.

En los casos en que se observe que algunas o algunos estudiantes tienen cierta dificultad para comenzar a resolver este problema puede resultar útil ofrecerles una hoja y habilitar su uso para cortar la figura y realizar dobleces, o bien ofrecerles directamente la figura en papel.


2. Pintá un cuarto de cada uno de los siguientes rectángulos.

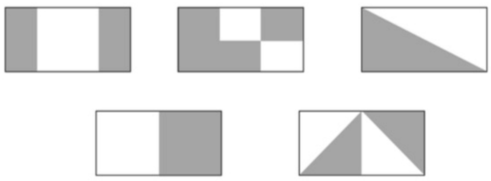
Luego de haber conversado y reflexionado con ellas y ellos acerca de la idea trabajada con los primeros problemas, se podría proponer el problema 3.

3. ¿Es cierto que en esta figura se sombreó un cuarto?

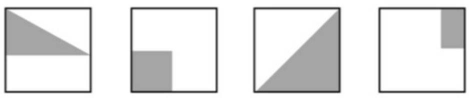


En los **problemas 4** y **5** vuelve a ponerse en juego la relación entre las partes y el todo con diferentes fracciones, y también la idea de que las partes pueden tener diferentes formas a partir de un mismo entero.

4. ¿En cuál o cuáles de estos dibujos te parece que se coloreó la mitad del rectángulo?



5. ¿Qué fracción del entero está sombreada en cada figura?



A modo de reflexión y sistematización de las ideas que hasta ahora se pudieron elaborar se propone la siguiente actividad:

Vuelvan a mirar el problema 3. Compartan sus respuestas y expliquen cómo se dieron cuenta.

Revisen los problemas que resolvieron hasta ahora y anoten algunas ideas que hayan aprendido sobre las fracciones.

Problemas para repartir

En el material para estudiantes encontrarán una serie de problemas de reparto que podrán vincularse con la variedad de problemas de división que las y los estudiantes hayan resuelto anteriormente.

En los **problemas** del **1** al **5** es posible que recurran a dibujos o gráficos para su resolución, representando el entero u enteros y las personas entre las que se realizará el reparto. Este procedimiento, en los problemas 3 y 5, dará lugar a diversos cálculos o particiones ya que los enteros se pueden fraccionar en mitades o en cuartos.

1. Se quiere repartir un chocolate entre dos amigos de manera que ambos reciban la misma cantidad y no sobre nada. ¿Cuánto le toca a cada uno?
2. Se corta y reparte una pizza entre 4 amigas. Todas reciben la misma cantidad y no queda nada de pizza. ¿Cuánta pizza recibe cada una?
3. Cuatro amigas compraron 2 chocolates. Todas quieren comer la misma cantidad y que no sobre nada. ¿Cuánto le toca a cada una?
4. Se quiere repartir 1 pizza entre 8 amigas de manera tal que todas reciban la misma cantidad y no sobre nada de pizza. ¿Cuánta le toca a cada una?
5. Cuatro chicos tienen tres alfajores. Todos quieren recibir la misma cantidad y que no sobre nada. ¿Cuánto va a recibir cada uno?

Se propone seguir estudiando situaciones de reparto, pero en el siguiente conjunto de problemas se deberá repartir más de un entero por persona. Posiblemente los recursos que se utilicen sean muy similares a los que ya han usado para los problemas anteriores.

6. Se reparten 6 alfajores entre 4 amigas. Todas quieren recibir la misma cantidad y no quieren que sobre nada. ¿Cuánto le corresponde a cada una?
7. Se reparten 9 chocolates entre 4 amigos en partes iguales y no sobra nada. ¿Cuánto recibe cada uno?
8. Se reparten 11 chocolates entre 4 amigas en partes iguales y no sobra nada. ¿Cuánto recibe cada una?

Es esperable que para resolver estos problemas las y los estudiantes utilicen cálculos de dividir o multiplicar y que, inicialmente, no reparen en la necesidad de seguir repartiendo el resto. El trabajo del grupo docente será promover espacios de intercambio en los que se remita a los enunciados buscando que las y los estudiantes puedan reconocer que no debe sobrar nada luego del reparto. En este material se proponen contextos en los que sí se sigue repartiendo porque el objetivo es justamente partir para usar las fracciones. Estas ideas podrán quedar escritas en las carpetas o en afiches para constituir "ayudas" para nuevos problemas con fracciones.

Para sistematizar lo aprendido a partir de los problemas de reparto se sugiere la siguiente actividad de reinversión que podría resolverse individualmente y luego compartirse grupalmente, o bien, resolverse de manera colectiva y dejar, además de la actividad, un registro escrito de las ideas que vayan surgiendo en el intercambio.

Para usar lo que aprendieron

Vuelvan a mirar los problemas para repartir y completen, entre todas y todos, el siguiente cuadro.

Cantidad a repartir	Entre	¿Cuánto a cada una o uno?
2	4	
3	4	
5	4	
6	4	
7	4	
8	4	
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
9	8	
10	8	

Problemas con kilos y litros

Para continuar el trabajo con fracciones, se proponen problemas que involucren su uso social en el contexto de la medida de pesos y capacidades. Se reconoce que las y los estudiantes han tenido numerosas oportunidades de interactuar con estas expresiones numéricas, por ejemplo al hacer compras por peso, elegir envases de acuerdo a su capacidad, estimar pesos en la distribución de comestibles en bolsas, etc. En esta propuesta se elaboraron problemas que, de alguna manera, recrean situaciones para analizar y estudiar relaciones entre fracciones.

Una aclaración importante es que, por más que las situaciones que siguen hacen ingresar la suma y la resta de fracciones, se pretende que las y los estudiantes pongan en juego estrategias no algorítmicas de resolución, pues se intenta generar condiciones para que puedan resolver esas sumas y restas a través de cálculos mentales, apelando a estrategias más intuitivas y exploratorias en las que se pongan en juego las relaciones entre enteros, medios, cuartos y octavos. Se espera que a partir de los diferentes problemas que van resolviendo empiecen a usar y a explicitar esas relaciones, por ejemplo "dos de un cuarto hacen un medio" o "dos octavos es lo mismo que un cuarto" o "medio y un cuarto se puede escribir $3/4$" o "$1/2 + 1/4 + 1/4 = 1$", "si a 1 le saco $1/4$ me quedan $3/4$", etc.

Los diferentes ítems del **problema 1** pueden ser resueltos utilizando estrategias de cálculo mental, apelando a la relación "$1/2$ kg y otro $1/2$ kg equivalen a 1 kg", o "$1/4$ kg es la mitad de $1/2$ kg", entonces "4 de $1/4$ kg equivalen a 1 kg"; también a que "el doble de paquetes significa el doble de kg de harina". Tal vez las relaciones entre cuartos y medios formen parte del repertorio de algunas y algunos por vincular cantidades de productos que consumen habitualmente o que conocen. Sin embargo será necesario difundir estas ideas a todo el curso.

1. Las siguientes imágenes representan paquetes de harina de diferentes tamaños.

Considerando estos tipos de paquetes responder las siguientes preguntas.

a- ¿Cuántos paquetes de ½ kg de harina debe comprar Alba para tener 1 kg? ¿Y para tener 2 kg?

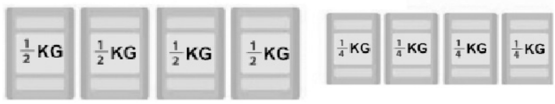
b- ¿Cuántos paquetes de ¼ kg de harina debe comprar Toti para tener 1 kg? ¿Y para tener 2 kg?

c- Luna necesita comprar 2 kg y medio de harina, ¿qué paquetes puede elegir?

d- ¿Cuánta harina compró Raúl si llevó dos paquetes de ¼ kg y uno de 1 kg?

e- ¿Quién compró más harina, León o Mora?

León **Mora**



Para realizar los cálculos es posible que las niñas y los niños se apoyen en dibujos o esquemas. Los ítem a, b y c consisten en sumar la misma cantidad en cada uno varias veces; podrían surgir así expresiones como “un cuarto más otro cuarto es un medio”, “un medio más otro medio es un entero”. Será necesario hacer ver y dejar anotado durante la puesta en común que se están analizando expresiones equivalentes y que pueden ser útiles al resolver otros cálculos.

Si estas conclusiones quedan en el aula y en las carpetas, podrán ser usadas cuando se necesiten. Así mismo será necesario recalcar y dejar anotado que “4 cuartos forman 1 entero” y que “2 medios forman 1 entero, entonces 2 enteros serán 8 cuartos o 4 medios” y se podría continuar con anotaciones para más enteros.

También que “si a 1 entero se le saca $\frac{1}{4}$ quedan $\frac{3}{4}$” o que “si a 2 enteros se le saca $\frac{1}{2}$ quedan $\frac{3}{2}$” u otras similares; y dejar a la vista de la clase también estas anotaciones para que puedan recurrir a las mismas siempre que lo necesiten, expresadas tanto en lenguaje coloquial como a través de cálculos de sumas y restas. El ítem c pide una manera de alcanzar 2 kg y medios de harina, pero se espera que surjan combinaciones diferentes de paquetes entre las y los estudiantes. Por ejemplo 2 paquetes de 1 y uno de medio kilo, o 5 paquetes de medio kilo, o 10 de un cuarto, etc. Si no aparecieran diversas maneras de armar 2 kg y $\frac{1}{2}$, en la puesta en común la o el docente podrá comentar que en otro curso alguien propuso una forma diferente y pedir al grupo que analice su pertinencia, así como invitar a que busquen y propongan otras formas de conseguir 2 y medio kg de harina con los paquetes dibujados.

Los **problemas 2** y **3** también podrían ser resueltos con las relaciones mencionadas en el párrafo anterior, pero el hecho de pedir explicación de la estrategia usada agrega una tarea; dicha explicación podrá ser escrita en la carpeta de cada estudiante, pero será interesante que luego sea expuesta para reflexionar colectivamente.

2. En un supermercado el pan se vende en bolsas de medio kilo. Si se colocan 3 de esas bolsas en la balanza, ¿cuánto pesarán todas juntas? Explicá cómo lo pensaste.

3. En una bolsa hay 5 kg de yerba que se reparten en dos bolsas iguales, poniendo en cada una la misma cantidad. ¿Cuánta yerba habrá en cada bolsa?

Para decidir qué explicaciones y/o estrategias se exponen, la o el docente podrá observar las producciones de sus estudiantes y solicitar que se difundan aquellas que sean diferentes entre sí y permitan ponerse a discusión. Será válido que se converse acerca de una estrategia que dé un resultado errado entre otras que arrojen resultados correctos teniendo en cuenta que, no debe exponerse ni criticarse a la persona que haya realizado la producción equivocada, sino a la estrategia o la explicación. Sobre las estrategias correctas diferentes entre sí, la discusión puede girar en torno a sus similitudes y diferencias: qué tienen en común, cómo se vinculan con el problema y entre sí.

Los **problemas 4, 5** y **6** por más que se vean parecidos no lo son, porque el 4 ofrece como datos la cantidad a repartir y en cuántas partes se hace el reparto, pero el 5 y el 6 ofrecen la cantidad a repartir y cuánto en cada parte.

4. ¿Cuántos vasos de medio litro se pueden llenar con el contenido de una botella de dos litros y medio?

5. Una botella de agua tiene dos litros y cuarto. ¿Cuántos vasos de un cuarto de litro se pueden llenar con esa botella?

6. Lorenzo, Agustín y Luciano comieron 1 kilo y 1/4 de los 2 kilos de mandarinas que compraron. ¿Será cierto que les quedó ½ kilo de mandarinas para mañana?

La diferencia mencionada propicia diversas estrategias de resolución. Por ejemplo para el 5 y el 6, al ser problemas de partición, será posible ir descontando o restando desde la cantidad de líquido que se tiene hasta no poder descontar más, controlando cuántas veces se restó, o podría sumarse la cantidad de líquido de cada recipiente tantas veces como sea necesario hasta llegar a la cantidad de líquido que se tenía, también controlando cuántas veces se sumó; luego deberá contarse cuántas veces se restó o se sumó.

Cabe mencionar que si bien la estrategia de reparto uno a uno también podría utilizarse para el problema 4, debe considerarse que las cantidades que se irían restando conforman “todas juntas” el resultado final del reparto. Esa diferencia en el sentido del problema representa una complejidad diferente. Para el reparto, a modo de ejemplo, se podría comenzar por 1 kg en cada bolsa, luego otro kilo en cada bolsa, y finalmente repartir el kilo que queda en partes iguales.

En los tres problemas últimos que se analizaron (4, 5 y 6) las sumas y restas incluyen cantidades iguales lo que debería significar un menor grado de complejidad para las y los estudiantes que aquellas en las que intervienen fracciones con diferentes denominadores; sin embargo en los resultados parciales surgirán fracciones diferentes y será necesario poner en discusión cómo se enfrentaron a dichos cálculos, sacar conclusiones y dejarlas anotadas de manera que puedan acceder a las mismas siempre que lo necesiten. Es posible que, a partir de las reflexiones posteriores a la resolución de los problemas anteriores, hayan quedado anotadas algunas conclusiones, tanto en carpetas como en afiches en el aula. De ser así, será importante retomar la discusión sobre las mismas y vincular con lo trabajado en torno a los tres problemas ya mencionados. Un ejemplo de conclusiones podría ser “tres cuartos más un cuarto es un entero”.

Los **problemas** del **7** al **11** pueden ser resueltos sumando algunas cantidades y buscando el complemento a otra, o restando desde una cantidad y viendo cuánto queda. Como las fracciones elegidas son referidas a medios y cuartos, se espera que las chicas y los chicos puedan apelar a lo resuelto en los problemas 1 al 6, tal vez descomponiendo algunas cantidades, realizando composiciones parciales o buscando algunas equivalencias. A partir del análisis de estos problemas, será muy importante que se discutan las formas de resolver, se difundan los distintos modos, se dejen anotadas conclusiones como “¾ más ¾ son $6/4$ y es lo mismo que $3/2$” o “al sumar ¾ más ½ obtengo $5/4$ y eso es 1 entero más ¼”.

7. Lara necesita 2 kg de frutillas para hacer una torta. Ayer compró ¾ kilos. ¿Cuánto le falta comprar?

8. Loli necesita 1 kilo y medio de duraznos en lata para hacer dos tartas. Dice que le falta comprar ¼ kilo. ¿Cuánto durazno compró hasta ahora?

9. A un verdulero le hicieron un pedido de 2 kilos de cerezas. Tiene 2 bolsas de ¾ kilos cada una. ¿Le alcanza para completar el pedido?

10. Doña Juana compró 2 bolsas de ½ kilo y 1 bolsa de ¾ kilos de ñoquis. Necesita para la cena 2 kilos para toda la familia. ¿Cuánto le falta comprar?

Finalmente se ofrece una situación de reflexión y sistematización de algunas ideas que posiblemente hayan surgido a partir del recorrido con los problemas anteriores.

Para revisar, comparar y resolver entre todas y todos

Expliquen cómo pensaron el problema 3. Si no usaron un cálculo, escriban al menos uno que permita resolver este problema.

Vuelvan a mirar el problema 7. Comparen y expliquen cómo lo resolvieron.

Anoten algunos cálculos con fracciones que hayan aprendido.

Problemas con fracciones de cantidades

Se propone continuar el trabajo con fracciones a partir de problemas que invitan a pensar sobre el cálculo de una fracción de una cantidad, apelando a considerar las partes y el todo.

Posiblemente, para resolver los próximos problemas, algunas chicas y algunos chicos recurran a dibujar o representar con marcas la colección completa (12, 24 o 32 elementos según el problema) para luego realizar en la imagen las particiones necesarias. Otras y otros estudiantes podrán realizar directamente los cálculos reconociendo que se trata de averiguar "la mitad de 12" o "un cuarto de 32" dividiendo mentalmente.

En el **problema 1**, utilizando dichas estrategias, podrían determinar cuánto es la parte que le corresponde a cada persona para luego responder la pregunta.

En el **problema 2**, para responder la primera pregunta podrán utilizar las mismas estrategias que se mencionaron en el primer párrafo de esta sección. Para la segunda pregunta podrían sumar las cantidades que obtuvieron para responder la primera pregunta o podrían recurrir a otras estrategias, como por ejemplo, reconocer que ¼ + ¼ es ½ y que con el otro ½ ya repartió el paquete entero y entonces no sobra nada. Será interesante discutir con el grupo acerca de esta relación entre cuartos y medios y, si no está ya escrita, incluirla en afiches y carpetas para poder recuperarla cuando lo precisen.

En el **problema 3** se pone en juego ⅛ como fracción a vincular con ¼. Es necesario aclarar que no se espera que las y los estudiantes apelen a cálculos algorítmicos para este problema, sino que se busca promover que puedan calcular ¼ de 32 y luego ⅛ de 32 para buscar las respuestas a las preguntas. Podrán recurrir a cálculos conocidos, como “la cuarta parte de” o hacer 32: 8, o bien buscar qué número multiplicado por 8 da como resultado 32, sin necesidad de buscar denominadores comunes para resolver este problema. También podrán identificar que ⅛ de 32 es la mitad de lo ya obtenido para ¼ de 32.

1. Joaquín compró una docena de flores para regalarle a su familia. La mitad se las dio a Ana, ¼ se las dio a Julia y el otro ¼ a Toti. ¿Cuántas flores le dio a cada una?

2. Joaquina tiene un paquete de 24 galletitas para repartir. Le dio ¼ del paquete a Ana, ¼ del paquete a Julia y ½ del paquete a Tamy. ¿Cuántas galletitas le dio a cada una? ¿Le sobraron galletitas? ¿Cuántas?

3. Pablo tenía 32 figuritas repetidas y decidió regalarle ¼ de esas a Rodolfo, ⅛ a Sabrina y ⅛ a Leticia. ¿Cuántas figuritas le dio a cada amiga y amigo? ¿Le sobraron figuritas repetidas? ¿Cuántas?

A continuación se ofrece una serie de problemas en los que también se debe averiguar la fracción de una cantidad, sin embargo la diferencia, con respecto a los problemas 1, 2 y 3, se encuentra en que la cantidad inicial no está disponible y en varias preguntas es justamente lo que es preciso averiguar. Por lo tanto, estas situaciones representan un tipo de problema más complejo que los anteriores. Es por esta razón que los números presentados son de rangos menores, para que no revistan en sí mismos una dificultad, y faciliten el despliegue de estrategias por parte de las y los estudiantes.

Para resolver los **problemas 4, 5 y 6** es posible que las y los estudiantes recurran a representaciones gráficas que pueden servir como referencias para organizar la información brindada por los problemas. También podrán utilizar cálculos de suma o multiplicaciones con números naturales. Por ejemplo, en el problema 6 podrán sumar 10 + 10 + 10 + 10 o multiplicar 4 x 10. Con esta información podrían realizar 40: 5, o bien pensar qué número multiplicado por 5 da como resultado el 40.

4. a- León tenía una bolsa con caramelos. Le quedaron dos caramelos y dice que es la cuarta parte de los que tenía. ¿Cuántos caramelos tenía en la bolsa?

b- A Fabricio, en cambio, le quedaron dos caramelos, que es la octava parte de los que tenía. ¿Cuántos caramelos tenía?

5. a- Pedro se comió 10 gomitas y dice que eran ¼ del paquete. ¿Cuántas gomitas tenía el paquete?

b- Santi comió ½ de su paquete de gomitas, que era igual al paquete de Pedro. ¿Cuántas gomitas comió Santi? ¿Cuántas le sobran?

6. En una oficina se compraron hojas para imprimir.

a- Leandro recibió ¼ de las hojas compradas, y cuando las contó eran 20. ¿Cuántas hojas compraron en la oficina?

b- Si Marcos recibió ½ de las hojas que se compraron, ¿cuántas hojas recibió?

Luego, a modo de cierre de este conjunto de problemas sobre fracciones de una cantidad, se ofrece una situación para reutilizar y elaborar ideas colaborativamente a propósito de este aspecto de las fracciones.

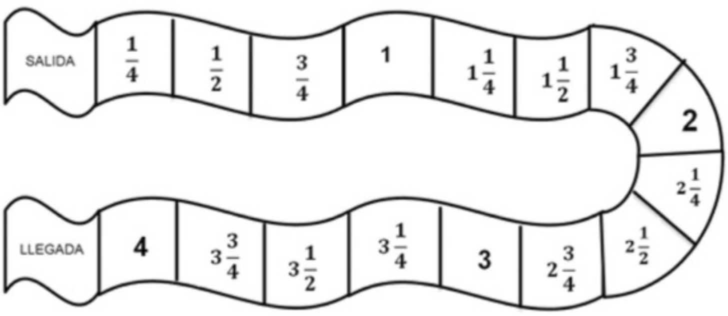
Calculen mentalmente cuánto es...

a- $\frac{1}{4}$ de 40
b- $\frac{1}{8}$ de 80
c- $\frac{1}{2}$ de 66
d- $\frac{3}{4}$ de 80

Vuelvan a mirar el problema 6. ¿Cuántas son $\frac{1}{8}$ de las hojas que compraron en la oficina?

Expliquen entre todas y todos cómo se puede hacer para calcular la fracción de una cantidad. Pueden usar ejemplos si los necesitan.

Al final del material para estudiantes se presenta un juego de recorrido con fracciones, acompañado por situaciones de análisis que podrán ampliarse a partir de jugadas que puedan surgir en las clases, o bien, de otras situaciones planteadas por maestras o maestros.



Números racionales II

En este segundo nivel se presenta un conjunto de situaciones problemáticas cuya intención es colaborar con las niñas y los niños para que sigan aprendiendo sobre los números racionales en dos de sus representaciones: fracciones y decimales. Se propondrá ampliar el rango de numeradores, pues se ofrecerán problemas con tercios, sextos, quintos y décimos. A su vez se amplían los sentidos de uso de las fracciones y se comenzará el trabajo en torno a las expresiones decimales de los números racionales en los contextos del dinero y de la medida.

Será de ayuda que las y los docentes que estén a cargo de cada grupo retomen actividades similares, por ejemplo del Nivel 1 de Números racionales, para utilizar los aprendizajes alcanzados y ampliarlos, recuperando las anotaciones que tengan sus estudiantes en sus carpetas o en afiches del aula. Algunas estrategias de resolución ya conocidas pueden ser reutilizadas en nuevos problemas dado que siguen la misma lógica pero se cambian los contextos, los rangos numéricos o involucran tanto el uso de expresiones fraccionarias como decimales.

Es importante que frente a los problemas de reparto se realicen vinculaciones explícitas con los problemas de reparto resueltos con números naturales, a pesar de que en esta ocasión cambian los números en juego y las soluciones involucran fracciones. Para estos problemas, del mismo modo que para los de reparto con números naturales, es esperable que chicas y chicos apelen a estrategias apoyadas en representaciones con dibujos o esquemas, o en la aproximación por multiplicaciones, o directamente a la división.

Como ya se mencionó, al enfrentarse a estas situaciones problemáticas es necesario que las niñas y los niños puedan contar con portadores de información para usar de manera cada vez más autónoma, que les permitan resolver o comprobar sus resoluciones. Nos referimos a cuadros o tablas donde tengan registrado un repertorio de cálculos con fracciones o diferentes estrategias de resolución de algunos problemas o las explicaciones que ellas y ellos construyeron luego de resolver otros problemas con fracciones;

pero también se hace referencia a la confección de nuevos afiches para el aula o anotaciones para la carpeta que contengan información. Estos se irán elaborando a medida que se resuelvan nuevos problemas y se vayan alcanzando nuevas conclusiones en las que se explicitan relaciones entre fracciones. En el material para estudiantes se proponen actividades para estos fines bajo títulos como: **“Para resolver entre todas y todos”, “Para usar lo que aprendieron” o “Para revisar, comparar y resolver”.**

Es muy importante señalar que los afiches o recordatorios con información se construyan y difundan luego de haber trabajado lo que allí se presenta recuperando lo abordado en discusiones, intercambios, puestas en común.

A continuación se ofrece un análisis de las propuestas de actividades, que pretende colaborar con la puesta en aula de dichos problemas, ayudando a las y los docentes a pensar el antes y el después de las resoluciones, consignando algunas posibles estrategias de resolución y algunos errores comunes para que puedan anticiparse e intervenir en las clases con el propósito de favorecer más aún los aprendizajes de chicas y chicos.

Las partes del entero

En esta serie de problemas se busca ampliar y profundizar el estudio de las fracciones en el contexto de la medida, promoviendo que se usen nuevas fracciones respecto del Nivel I, pues, en este nivel, se presentan tercios, sextos y quintos. En el **problema 1** se propone ir de la parte al entero a partir de una fracción de uso frecuente y muy probablemente conocida por chicas y chicos. En los **problemas 2** y **3**, a pesar de que la situación es bastante accesible porque se pide representar una parte de un entero, las fracciones puestas en juego van a requerir de un intercambio entre pares y con la o el docente para determinar qué representan los tercios y sextos.

1. Esta tira es 1/4 de una soga. Dibujá la soga completa.

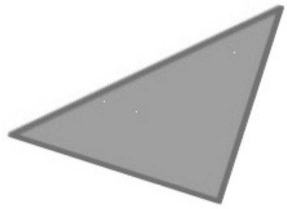
2. Tahiel tiene esta soga. Dibujá 1/3 de esta soga.

3. De esta cinta, Facundo quiere cortar 1/5. Hacé una marca por donde debería cortarla.

Los **problemas 4**, **5** y **6** vuelven sobre la idea de reconstruir el entero a partir de una parte. Es posible que los procedimientos para resolver estas situaciones involucren mediciones ya que las partes representadas constituyen unidades de medida en estos problemas. Se espera que las y los estudiantes realicen nuevas tiras o bien marquen o extiendan las tiras presentadas. Serán válidas todas las representaciones que permitan reconstruir los enteros, ya sean hacia los laterales, hacia arriba o abajo para los **problemas 5** y **6**.

4. Este dibujo representa 1/6 de una manguera. Dibujá la manguera completa.

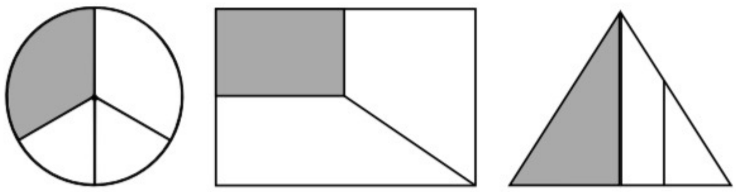
5. El siguiente dibujo representa la mitad de una figura. Dibujá la figura entera.



6. El siguiente dibujo representa 1/3 de una figura. Dibujá la figura entera.

En el **problema 7** se plantea una diferencia respecto de los anteriores ya que no se debe reconstruir el entero, sino decidir si el "pintado" fue correcto o no. Se pone en juego determinar la equivalencia entre las partes en las que fue dividido el entero. Las y los estudiantes podrán responder erróneamente considerando que en cada una de las tres imágenes hay una parte de tres sombreada. Sin embargo, será suficiente con que las y los estudiantes puedan argumentar que en el segundo y en el tercer dibujo las partes no ocupan el mismo lugar, son de diferente tamaño, que si bien hay tres partes unas son mucho mayores que otras, u otras explicaciones similares.

7. Valentín quiso pintar 1/3 de cada figura. ¿Lo hizo bien? Explicá tu respuesta.



En el **problema 8** se propone determinar qué fracción está sombreada en cada dibujo. Uno de ellos tiene algunas marcas hechas y el otro no. Si hubiera chicas o chicos que no supieran por dónde comenzar a resolver este problema podría sugerirse la realización de nuevas marcas, sin indicar cuáles ni cómo hacerlas. En caso de que la dificultad persista se pueden ofrecer algunas marcas para ver si éstas ayudan a desplegar algún procedimiento.

8. ¿Qué fracción del entero está sombreada en cada figura?

La siguiente actividad tiene el propósito de reinvertir algunas ideas que hayan surgido de los intercambios y debates en torno a los problemas precedentes.

Para usar lo aprendido

Dibujá dos formas diferentes que podría tener una figura sabiendo que este dibujo representa 1/5 de esa figura.

¿Qué fracción del entero está sombreada en esta figura?

Problemas con tercios y sextos

Para continuar el trabajo con fracciones se propone resolver situaciones que involucren tercios y sextos, para luego ampliar a quintos y décimos, pero será necesario que las y los estudiantes hayan podido interactuar antes con situaciones que incluyan cuartos, medios y octavos para que puedan desplegar las mismas estrategias, u otras más avanzadas, que al resolver los problemas referidos a medios, cuartos y octavos.

Por más que las situaciones que siguen hacen ingresar la suma y la resta de fracciones, se pretende que se pongan en juego estrategias no algorítmicas de resolución, basadas en equivalencias, aun cuando las y los estudiantes no lo manifiesten con esa denominación, sino más bien a partir de algunas ideas sobre las relaciones entre las fracciones.

Los **problemas 1 y 2** implican calcular una diferencia que debe ser expresada como fracción. En el primero hace falta comparar tercios con medios. Las chicas y los chicos podrían representar el entero gráficamente y hacer una marca que represente 1/3 y otra que represente ½ para resolver este problema. En el segundo caso podrían pensar que los 5/6 se refieren a 1 y no a 2. Esta será una idea para poner en debate si surge como error en las producciones de las y los chicos, o bien a partir de la problematización que pueda realizar la o el docente.

1. Damián, Flavio y Ezequiel comieron 1/3 cada uno de los bombones que había en una caja. Si había 1 caja y media de bombones, ¿será cierto que les quedó 1/2 caja para mañana?

2. Tupac compró para su almuerzo 2 pizzetas. Comió 5/6 de una pizzeta. ¿Cuánto le sobró de todo lo que compró?

Los próximos problemas también requieren poner en diálogo fracciones como tercios y sextos, e incluso en el problema 6 vincularlas con cuartos y medios. Podrá verse que estos problemas requerirán de cálculos de suma, resta e incluso multiplicación, sin embargo no se espera que se utilicen estrategias algorítmicas, sino que se apoyen en otras que hayan elaborado a partir de intercambios, acuerdos y registros que estén en carpetas y afiches en el aula. A modo de ejemplo, para el **problema 4** las chicas y los chicos podrían llegar a $24/3$ como cantidad que se necesita para las doce personas sumando 12 veces $2/3$, y luego calcular cuántos budines representan para decidir si con 6 budines alcanza o no. Otra posibilidad es que vayan sumando $2/3$ hasta llegar a $6/3$ y reconozcan esta expresión como 2 enteros, que serían 2 budines para 3 personas. Y luego calcular que con 6 budines alcanzaría solo para 9 personas.

Para el **problema 5** las chicas y los chicos podrían reconocer que 2/6 equivalen a 1/3 y que por lo tanto 1/3 + 2/3 "da justo" 1. También podrían recurrir a dibujar un rectángulo de 6 cuadraditos y marcar en él 2/3 y 2/6 reconociendo que entre ambas fracciones cubren el entero. Para estos problemas no se espera que utilicen técnicas algorítmicas de suma de fracciones a través de la búsqueda de denominador común ni métodos de simplificación.

El **problema 6** promueve la búsqueda de equivalencias a partir de cálculos que podrían formar parte del repertorio disponible memorizado o escrito en carteles en el aula o en carpetas. Algunas chicas y algunos chicos podrían recurrir a sumar mentalmente 1+2/3+1/2+1/3 +1/4+3/4 (incluso sin escribirlo como una suma) agrupando por un lado los tercios, por otro los cuartos y los medios e identificar que el total es 3 y 1/2 y luego decir que "hay que dar a cada uno 1 y 1/2 y además 1/4", o identificar que cada uno recibirá 1 y 3/4. También podrían ir repartiendo las partes sin calcular el total, por ejemplo darle a uno de los hijos 1 y 3/4 y al otro 2/3, 1/3 -formando el entero- y luego 1/2 y 1/4 formando los 3/4. Tampoco en este problema se espera que utilicen métodos algorítmicos para sumar fracciones ni para repartir el total.

3. Octavio fabrica almohadones y le hicieron un pedido. Hoy hizo 1/6 de los que precisa. Dice que con 4 días más trabajando al mismo ritmo ya termina el pedido. ¿Tiene razón?

4. Para una reunión se calculó que cada persona come 2/3 de un budín. ¿Alcanzan 6 budines para 12 personas?

5. ¿Es verdad que si se suman 2/3 y 2/6 da justo 1?

6. Valentín cuando era chico coleccionaba figuritas. Encontró en el baúl de sus recuerdos varios paquetes, algunos completos y otros incompletos.

Había:

- Un paquete cerrado y completo;
- Un paquete con 2/3 de las figuritas;
- Dos paquetes con 1/2 de las figuritas;
- Un paquete con 1/3 de las figuritas;
- Un paquete con 1/4 de las figuritas;
- Un paquete con 3/4 de las figuritas.

a. ¿Podría repartir los paquetes entre sus dos hijos de manera que reciban la misma cantidad de figuritas?

b. Si es posible, proponé una manera de hacerlo.

Como síntesis para este grupo de problemas se ofrece la siguiente situación con el fin de sistematizar algunas ideas que pudieran haber surgido. Incluso, si no se propusieron intercambios entre las chicas y los chicos, esta propuesta puede constituirse en una buena oportunidad para hacerlo y dejar por escrito en carpetas y afiches algunas conclusiones que también servirán para ser reutilizadas en próximos problemas.

Vuelvan a mirar el problema 3 y expliquen cómo lo resolvieron.

Vuelvan a mirar el problema 6. Expliquen cómo lo resolvieron y anoten algunos cálculos que hayan usado para resolverlo.

Problemas con fracciones de cantidades

Se propone continuar el trabajo con fracciones a partir de problemas que invitan a pensar sobre el cálculo de una fracción de una cantidad, apelando a considerar las partes y el todo.

Para resolver los **problemas 1 y 2** las niñas y los niños podrían realizar dibujos o esquemas que permitan reconocer agrupamientos de a cuartos y de a medios, pero esta estrategia debería mostrarse poco cómoda por la cantidad de dibujos que deban hacer (60 huevos, 96 botellas), entonces se podrá conversar con la clase acerca de otras posibilidades como puede ser buscar números que multiplicados por 4 o por 2 se acerquen a 60 y a 96. Esto acercaría a las y los estudiantes a estrategias más avanzadas que les permitirían resolver con más comodidad el resto de los problemas.

1. Irene compró 60 huevos para repartir con sus dos hermanas. La mitad se los quedó ella, 1/4 se los dio a Julia y el otro 1/4 a Toti. ¿Cuántos huevos le quedaron a cada una?

2. Braulio vende productos de limpieza sueltos. Esta semana vendió 96 botellas, de las cuales 1/4 eran de detergente, 1/2 eran de lavandina, y otro 1/4 eran de jabón líquido para la ropa. ¿Cuántas botellas vendió de cada tipo de producto esta semana?

En los **problemas 3 y 4** se ponen en juego nuevas fracciones, pues se incluyen el tercio, el sexto y el doceavo. Es necesario notar que no se espera que las y los estudiantes apelen a los cálculos algorítmicos para resolver estos problemas, sino que se espera que puedan calcular $1/3$ de 66 o de 24, apelando a que es 66 o 24 dividido entre 3, o calcular $1/6$ de 66 y $1/12$ de 24 también recurriendo a la división. Pero también será posible averiguar 1/6 de 66 sabiendo que es la mitad de $1/3$ de 66 pues se ha dividido a 66 en el doble de partes, o averiguar $1/12$ de 24 sabiendo que es cuatro veces $1/3$ de 24, porque se ha dividido a 24 en el cuádruple de partes. Un error frecuente es pensar que $1/6$ de 66 es el doble que $1/3$ de 66 porque ahora hay un 6 en lugar de un 3 en la fracción o que $1/12$ de 24 es el cuádruple de $1/3$ de 24 porque ahora hay un 12 en lugar de un 3 en la fracción. Por supuesto que será necesario conversar acerca de esta idea errónea con el grupo para tratar de revisarla.

Así mismo, será interesante sociabilizar acerca de que en el **problema 3** es posible determinar que sobran figuritas repetidas porque $1/6$ y otro $1/6$ forman $1/3$, y al agregarle otro $1/3$ no se llega al entero; entonces para saber cuántas sobran podrán recurrir a sumar las entregadas y restarlas del total. Podría ser un buen momento para preguntar a niñas y niños en la puesta en común qué fracción de las figuritas repetidas le sobraron a Pablo, quienes podrían reconocer que si se entregaron $2/3$ entonces queda $1/3$ sin entregar, o bien, al identificar que sobran 22 figuritas y como cuando calcularon $1/3$ de 66 también les dio 22, reconocer que entonces sobra $1/3$ de las figuritas.

En cuanto a la primera pregunta del **problema 4**, las y los estudiantes podrían utilizar como estrategia sumar las fracciones dadas y comparar con el entero. Para sumar es posible que recurran a equivalencias ya conocidas, o bien que elaboren nuevas, por ejemplo podrían reconocer que $1/3$ más otro $1/3$ es $2/3$, y que $1/12$ más otro $1/12$ es $2/12$ o $1/6$. Esta última relación podrán elaborarla a partir de comparar con otras relaciones que ya se discutieron como $1/8$ y $1/8$ es $1/4$, así hasta aquí tendrían $1/6$ y $2/3$ y, para decidir si ambas fracciones suman igual o menos que 1 entero podrían recurrir a la equivalencia entre $2/3$ y $4/6$. Al sumar $4/6$ con $1/6$ obtendrían $5/6$ y podrían identificar que no se llega al entero, por lo tanto es posible realizar esa distribución y sobran paquetes de semillitas. Todas las relaciones que se han mencionado en estas últimas líneas es posible que no surjan inmediatamente entre las y los estudiantes, pero también es posible que intenten realizar transformaciones de las expresiones para poder sumar. La o el docente deberá intervenir proponiendo recurrir a portadores de información sobre las relaciones entre fracciones para poder ayudarse durante el proceso de resolución o de reflexión posterior sobre las dificultades identificadas.

3. Pablo tenía 66 figuritas repetidas y decidió regalarle 1/3 de esas a Rodolfo, 1/6 a Sabrina y 1/6 a Leticia. ¿Cuántas figuritas le dio a cada amiga y amigo? ¿Le sobraron figuritas repetidas? ¿Cuántas?

4. Mabel tiene 24 paquetes de semillitas de girasol, y decidió comerlas con la siguiente distribución: 1/3 de los paquetes la primera semana del mes, 1/12 la segunda semana, 1/12 la tercera semana y 1/3 la cuarta semana.

a. ¿Puede cumplir esa distribución?

b. Si respondiste que sí, ¿cuántos paquetes come en cada semana?

A continuación se ofrece una serie de problemas con un grado mayor de complejidad por el lugar que ocupa en ellos qué es lo que se solicita averiguar; por ejemplo en los **problemas** del **5** al **7** lo que debe averiguarse es la cantidad inicial, por esta razón se han involucrado números de los llamados redondos (terminados en cero) para que no revistan en sí mismos una dificultad y faciliten el despliegue de estrategias por parte de las y los estudiantes.

Para resolver estos problemas es posible que recurran a representaciones gráficas que pueden servir como referencias para organizar la información que brindan los problemas. También podrán utilizar cálculos de suma o multiplicaciones.

En el **problema 5 a**- podrían recurrir a sumar 6 veces 10 o a multiplicar 6 x 10; en el problema 5 b- podrían sumar 3 veces 10 o multiplicar 3 x 10. Es posible también que algunas o algunos reconozcan que la colección de León es el doble que la de Fabricio y por lo tanto apelar al cálculo de mitades y dobles.

En el **problema 6** podrán sumar 10 + 10 + 10 + 10 + 10 o multiplicar 5 x 10. Con esta información podrían realizar 50: 10 = 5, o bien pensar qué número multiplicado por 10 da como resultado el 50, y así poder responder las preguntas del ítem b-. Pero también podrían responder que será la mitad de la cantidad de canicas porque 1/10 es la mitad de 1/5.

En el **problema 7** las relaciones entre cantidades no son tan amables como en el 5 y 6, pero las chicas y los chicos podrán recurrir a multiplicaciones o divisiones para responder, por ejemplo, si 45 son 1/5 entonces el entero será 5 veces 45. Una vez averiguado podrán dividir por 3 para saber cuántas hojas le dieron a Marcos, pero esta vez no podrán recurrir a relaciones entre quintos y tercios, como sí podían en los dos anteriores problemas.

5. a. León tenía una bolsa con canicas. Luego de jugar varias veces le quedaron 10 canicas y dice que es la sexta parte de las que tenía. ¿Cuántas canicas tenía en la bolsa?

b. A Fabricio también le quedaron 10 canicas, y dice que es la tercera parte de las que tenía. ¿Cuántas canicas tenía Fabricio?

6. a. Pedro se comió 10 gomitas y dice que era 1/5 del paquete. ¿Cuántas gomitas tenía el paquete?

b. Santi comió 1/10 de su paquete de gomitas, que era igual al paquete de Pedro. ¿Cuántas gomitas comió Santi? ¿Cuántas le sobraron?

7. En una oficina se compraron hojas para imprimir:

a. Leandro recibió 1/5 de las hojas, y cuando las contó eran 45. ¿Cuántas hojas compraron en la oficina?

b. Si Marcos recibió 1/3 de las hojas que se compraron. ¿Cuántas hojas recibió?

Luego, a modo de cierre de este conjunto de problemas sobre fracciones de una cantidad, se ofrece una situación para reutilizar y elaborar ideas colaborativamente, a propósito de este aspecto de las fracciones.

Calculen mentalmente cuánto es:

a. 1/4 de 120

b. 1/5 de 80

c. 1/3 de 120

d. 2/5 de 80

e. 1/10 de 500

f. 5/6 de 72

Vuelvan a mirar el problema 7 y respondan: ¿Cuántas son 1/10 de las hojas que compraron en la oficina? ¿Y 2/5 de las hojas que se compraron?

Expliquen entre todas y todos cómo se puede hacer para calcular la fracción de una cantidad. Pueden usar ejemplos si los necesitan.

Problemas para repartir

En el material para estudiantes encontrarán una serie de problemas de reparto que podrán vincularse con la variedad de problemas sobre división que hayan resuelto anteriormente las y los estudiantes. Pero además, con este grupo de actividades, se pretende que puedan vincular directamente las partes de la división con expresiones fraccionarias.

1. Se reparten 17 chocolates entre 6 amigos. Todos van a recibir la misma cantidad y no quieren que sobre nada. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

2. Entre 10 amigas se repartieron 25 pizzetas sin que sobre nada y todas comieron lo mismo. Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Cada una comió 2 y 1/5.

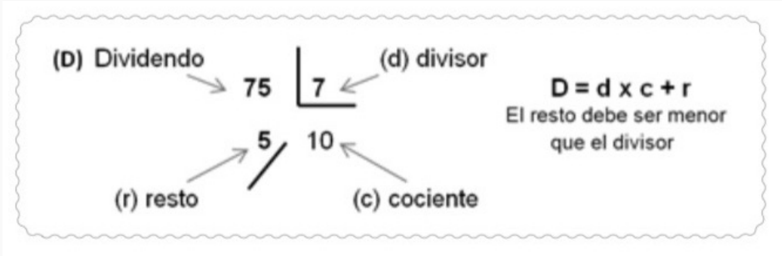
b. Cada una comió 2 y 1/2.

c. Cada una comió 5/2.

d. Cada una comió 25/10.

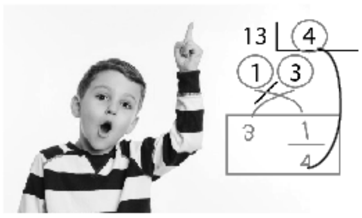
Se ofrece un recordatorio (o tal vez para algunas y algunos sea una información nueva) con las partes o elementos de la división. Es esperable que las chicas y los chicos tengan este recordatorio a mano, en su carpeta o cuaderno, pero además es útil que esté a la vista de todas y todos en el salón de clases.

Para recordar



Para continuar, el **problema 3** se constituye en una buena situación para generar intercambios respecto de las relaciones entre los elementos de la división y las expresiones fraccionarias como relaciones entre números que permiten expresar repartos, de manera tal que se pueda encontrar el vínculo entre el resto de la división y el numerador de la fracción, así como entre el divisor con el denominador, para poder identificar cómo se puede seguir repartiendo el resto.

3. Santino tenía que repartir 13 turrones entre 4 hermanos e hizo esta cuenta:



¿Qué opinás? ¿Cómo lo habrá pensado?

Los problemas **4, 5 y 6** se ofrecen para reinvertir las relaciones mencionadas respecto del problema 3.

4. Para repartir 62 obleas entre 4 personas se realizó la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 62 & 4 \\ \hline 2 & 15 \end{array}$$

¿Cuánto recibe cada persona si se reparte todo en partes iguales y no sobra nada?

5. Para hacer un reparto equitativo sin que sobre nada una persona realizó la siguiente cuenta de dividir:

$$\begin{array}{r|l} 58 & 7 \\ \hline 2 & 8 \end{array}$$

a. ¿Cuántas cosas se repartieron?

b. ¿Entre cuántas personas?

c. ¿Cuánto recibió cada una?

6. Proponé un cálculo para realizar un reparto de 60 kg de yerba en 8 paquetes iguales sin que sobre nada, e indicá cuánta yerba quedará en cada paquete.

La siguiente actividad puede colaborar con la sistematización de algunas ideas que hayan surgido a propósito de la resolución de los problemas de reparto precedentes.

Para revisar y pensar entre todas y todos

Los problemas 1 y 2

Resuelvan nuevamente el problema 1 y 2 usando el procedimiento explicado por Santino en el problema 3, y corroboren si ustedes habían respondido lo mismo.

Al resolver un problema de reparto equitativo se realizó la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 69 & 6 \\ \hline 9 & 10 \end{array}$$

Y se dijo que cada persona recibió 10 y 9/6 ¿Están de acuerdo con lo hecho?

Vuelvan a mirar el problema 4 y reflexionen sobre el siguiente problema:

"Se tienen 62 chocolates para repartir en una clase y se quiere dar 4 a cada alumna y alumno. ¿Para cuántos estudiantes alcanza?".

¿Sería correcto responder que alcanza para 15 y 2/4 estudiantes?

Pensar algunos cálculos con fracciones

Con los problemas que siguen, se invita a las y los estudiantes a pensar en la resolución de cálculos mentales, es decir sin recurrir a algoritmos sino a equivalencias y a relaciones entre las cantidades que hayan memorizado o que estén en portadores de información elaborados entre todas y todos. Será importante que se les recuerde que pueden hacer dibujos, esquemas, cálculos o pensar en un contexto para ayudarse (paquetes de café, yerba, azúcar, etc.) Incluso la calculadora estará habilitada para comprobar los cálculos y en ocasiones podrían usarla para resolver y luego discutir los resultados obtenidos, o bien anticipar un posible resultado, resolverlo con la calculadora y luego comparar y conversar acerca de lo encontrado.

En los **problemas 1** y **2** se espera que las y los estudiantes puedan utilizar como estrategia "buscar lo que le falta o sobra al numerador para ser igual que el denominador", aún sin mencionar las partes de la fracción con sus nombres. El **problema 2**, particularmente, se podría también resolver descomponiendo cada fracción en su parte entera y su parte fraccionaria y ver que "lo que se pasan de 1" es la parte fraccionaria. Las dos estrategias mencionadas podrían pensarse apoyadas en dibujos o en paquetes, por ejemplo 3/2 son 3 paquetes de medio, y con dos de esos se forma uno, entonces la fracción 3/2 se pasa por ½ del entero. En fracciones que no incluyen valores de uso cotidiano o social, como pueden ser los décimos, las chicas y los chicos podrían recurrir a dibujos de enteros y sus particiones; ante ello podrá surgir la duda sobre no poder tener 17 particiones si se dividió al entero en 10 partes iguales. Las intervenciones de la o el docente permitirán orientar a las y los estudiantes para que reconozcan la necesidad de dibujar dos enteros y a ambos dividirlos en 10 partes y considerar recién allí que, de todas las partes obtenidas, deberán identificar 17 para representar la fracción dada.

1. ¿Cuánto le falta a cada una de estas fracciones para llegar a 1?

a. 3/4

b. 7/8

c. 5/6

d. 1/5

e. 3/10

f. 3/8

2. ¿Cuánto se pasa cada una de estas fracciones de 1?

a. 5/4

b. 3/2

c. 9/8

d. 11/6

e. 7/5

f. 17/10

Al resolver los **problemas 3** y **4** no se espera que surjan algoritmos, ni se sugiere que sean propuestos por las y los docentes; por el contrario, es esperable que niñas y niños se apoyen en cálculos conocidos o en equivalencias registradas en afiches y carpetas, que descompongan las fracciones y luego resten o sumen por partes, que esquematicen con paquetes o botellas, entre otras estrategias. Es importante aclarar que se ha elegido sumar y restar fracciones que tienen denominadores múltiplos entre sí (vocabulario que no se incluye para las y los estudiantes), justamente para que puedan ser usadas las relaciones ya trabajadas en grupos de problemas anteriores y que puedan así vincular los cálculos ligados a contextos reales y habituales con los cálculos intramatemáticos, desprendiéndose de los contextos para analizar.

3. Calculá estas sumas mentalmente:

a. 1/4 + 3/4 =

b. 1/8 + 3/8 =

c. 1/4 + 7/4 =

d. 1/2 + 1/4 + 1/8 =

e. 1/3 + 5/6 =

f. 2/3 + 1/6 =

g. 2/5 + 1/5 + 3/10 =

h. 7/10 + 4/5 + 1/2 =

4. Calculá estas restas mentalmente:

a. 9/4 - 3/4 =

b. 15/8 - 1/4 =

c. 4/5 - 3/10 =

d. 11/6 - 1/3 =

Por último se ofrece el siguiente problema para el que deberán establecer acuerdos con el fin de dejar escritas algunas pistas para resolver cálculos con fracciones.

Vuelvan a mirar los problemas 3 y 4 y expliquen cómo resolver las sumas y las restas. Pueden usar ejemplos si lo necesitan.

Explorar números decimales en el contexto del dinero

En esta serie de problemas se recrean situaciones en las que se utilizan frecuentemente números decimales. La idea de este material es que las y los estudiantes empiecen a usarlos sin ninguna presentación ni definición previa acerca de su denominación, el tipo de números, el sentido de la coma o los nombres de décimos, centésimos, etc. Al contrario, se propone resolver problemas –en el contexto del dinero y luego en el de las medidas– sin ninguna enseñanza previa y promover reflexiones a partir de su uso. Es importante aclarar que no se apela al uso de algoritmos para la resolución, sino a que las chicas y los chicos desplieguen otras estrategias de cálculo mental. Por ejemplo para los **problemas 1** y **2** podrán pensar en sumar primero la parte entera y luego la decimal y sumar ambas por separado. Tal vez no reparen en que con diez monedas de 10 centavos se forma 1 peso (un entero), por lo que será necesario generar un intercambio al respecto. En los **problemas 3** y **4** las estrategias podrán ser las mismas, pero se han elegido precios mayores y los números pueden presentar algunas dificultades al realizar las sumas o restas.

Se recuerda que la calculadora es una herramienta que puede ser utilizada para la resolución y comprobación de los resultados.

3. Calculá estas sumas mentalmente:

a. 1/4 + 3/4 =

b. 1/8 + 3/8 =

c. 1/4 + 7/4 =

d. 1/2 + 1/4 + 1/8 =

4. En la ferretería, Mabel compró tornillos por $456,30, tarugos por $140 y arandelas por $201,09. ¿Cuánto gastó?

Los **problemas 5** y **6**, si bien podrían ser resueltos mediante multiplicaciones porque se debe sumar varias veces la misma cantidad, posiblemente sean resueltos por las y los estudiantes a través de sumas reiteradas. Incluso pueden identificarse algunos de esos cálculos y dejar anotados en afiches algunos resultados que pueden servir para luego seguir usando, como por ejemplo que $0,50 sumado 4 veces es $2, entonces $2,50, $3,50 o $4,50 sumado 4 veces será 4 por la parte entera y $2 más; o $0,60 sumado varias veces se puede pensar como $0,50 sumado esas veces más $0,10 sumado la misma cantidad de veces; o que al sumar 10 veces una cantidad de centavos pasa a pesos, $0,50 sumado 10 veces es $5.

5. En un negocio de ropa ofrecen una campera por $1.500 en un solo pago o en 6 cuotas de $280,60. ¿Cuánto más cara es la campera en cuotas que en un solo pago?

6. En una ferretería están vendiendo una aspiradora en 10 cuotas de $340,70. ¿Cuánto se paga en total por la aspiradora?

En los **problemas 7** y **8** se promueve un trabajo que relaciona las escrituras decimales con el valor posicional: el 7 lo hace a partir de la composición de números y el 8 a partir de la descomposición.

7. a. ¿Cómo se escribe usando solo números, coma y el signo $ el precio 8 pesos con 50 centavos?

b. ¿Y 80 pesos con 50 centavos?

c. ¿Y 80 pesos con 5 centavos?

8. En un juego de mesa un jugador tiene que pagar $1,75 usando monedas de 10 centavos y de 1 centavo. ¿Cuántas monedas de cada una tiene que usar para pagar justo?

A modo de sistematización se ofrece el siguiente problema:

Para explicar entre todas y todos

Revisen los problemas con decimales y escriban algunas ideas que ayuden a otras personas a resolver cálculos con números decimales.

Por ejemplo: 0,5 + 0,5 = 1 porque...; quince centavos se escribe así $0,15 porque...

Explorar números decimales en el contexto de la medida

Con los problemas que siguen, ligados al contexto de la medida de longitud y de peso, se pretende que las y los estudiantes puedan poner en juego algunas de las conclusiones que alcanzaron a construir en el contexto del dinero acerca de los números decimales, y que puedan reutilizar algunas estrategias que también hayan construido al resolver dichos problemas, como ser estrategias de suma y resta o la posición que ocupan los números en las expresiones decimales.

En este punto, es importante aclarar que será muy necesario que las alumnas y los alumnos tengan a la vista para resolver estos problemas tablas con equivalencias entre algunos múltiplos de las unidades de medida que se usarán (sin usar necesariamente el término “múltiplos”), se hace referencia particularmente a que 1 metro equivale a 100 centímetros y, por lo tanto, 1 centímetro equivale a 0,01 metros; y que 1 kilogramo equivale a 1000 gramos y, por lo tanto, 1 gramo equivale a 0,001 kilogramos. Estos portadores de información deben estar a la vez en las carpetas y en el aula. También es importante aclarar que sigue estando habilitada la calculadora para resolver y para comprobar las actividades ya resueltas.

En los **problemas 1** y **2** se pide realizar una comparación entre medidas pero que se expresan con diferentes múltiplos de la unidad correspondiente y el grupo podrán apelar a las tablas antes mencionadas para analizar y responder. En cambio, en los **problemas 3** y **4** deberán producir una escritura en expresiones decimales y explicar cómo se dan cuenta de que es esa la producción necesaria. En las puestas en común podrán conversar acerca de las producciones y comparar las estrategias usadas para realizarlas, así como discutir sobre la pertinencia de las escrituras producidas en el problema 4.

1. En una ficha médica una doctora anotó que Ezequiel mide 102 cm. ¿Ezequiel mide más o menos de un metro? Explicá tu respuesta.

2. Al nacer, Agostina pesó 3,75 kg. ¿Es cierto que su peso se puede escribir 375 g? Explicá tu respuesta.

3. ¿Cómo se anotará en kilos el peso de un bebé que pesa 6.700 g? Explicá tu respuesta.

4. ¿Cómo se anotará, usando solo números y la coma, la medida 2 metros y 9 centímetros? Explicá tu respuesta.

Los **problemas 5** y **6** vuelven a poner en juego estrategias de suma de decimales, y se espera que las chicas y los chicos puedan reutilizar las estrategias que construyeron al resolver problemas en torno al dinero. Será necesario que en las puestas en común se converse sobre la generalidad de las estrategias de cálculo mental, independientemente del contexto.

5. De un lazo para hacer moños, Julia cortó 3 tiras diferentes y no le sobró nada: una tira mide 1,20 m; otra tira mide 0,60 m y la última mide 0,70 m. ¿Cuánto medía el lazo entero?

6. En el almacén, Julia compró 350 g de paleta, 350 g de salchichón, 350 g de mortadela y 500 g de queso de máquina. Anotá usando números y la coma, ¿cuánto pesa en kilos todo el fiambre que compró?

El **problema 7** se sugiere para resolver en pequeños grupos, si fuera posible en este contexto, con la intención de promover discusiones al interior de cada grupito. Los números elegidos exigen poner en juego ideas acerca de la posición que ocupan las cifras en el número y, además, al estar ofrecidos en diferentes múltiplos del metro, exige hacer conversiones para reducir las confusiones.

7. Estas son las alturas de jugadores profesionales de un equipo de vóley:

2,2 m – 1,98 m – 2,15 m – 199 cm – 210 cm

¿Qué altura tiene el jugador más alto? ¿Y el más bajo?

A continuación, se encontrará la siguiente situación que busca que las y los estudiantes analicen y compartan sus estrategias de comparación.

Para explicar entre todas y todos

Vuelvan a mirar cómo resolvieron el problema 7 y escriban algunas pistas que sirvan para comparar números decimales.

Cálculos mentales con decimales

En el grupo de problemas que siguen se podrán poner en práctica algunas de las estrategias antes analizadas y construidas por las y los estudiantes, reutilizándolas sin un contexto particular. Se han elegido para los primeros cálculos (**problemas 1** y **2**), números que permiten pensar en las posiciones de las cifras, resolviendo por separado parte entera y parte decimal, para luego (**problemas 3 en adelante**) ingresar en cálculos que requieren analizar la características del sistema de numeración, en particular el agrupamiento decimal. Por ejemplo, se espera que establezcan relaciones del estilo "si se suma 0,9 y 0,3 dará 1 entero y algo más porque me pasé de 10 décimos", o "si se resta 0,7 a 3,2 deberé pasar a 2 enteros porque debo restar más décimos de los que se tienen". Estas conclusiones deberán discutirse con el grupo luego de resolver, poniendo en debate los resultados obtenidos y las maneras que hayan elegido para alcanzarlos, y dejándolos anotados en afiches y carpetas.

1. Intentá hacer estos cálculos mentalmente:

a. 3,7 + 1,1= **c.** 16,7 + 1,2= **e.** 28,7 - 0,6=

b. 67,5 - 1,5 = **d.** 5,6 - 2,5= **f.** 50,8 + 50,1=

2. Los cálculos de cada fila tienen algunas cosas en común. Intentá pensar los tres juntos. Cuando termines controlá tus resultados con la calculadora.

a. 23,45 + 0,1= **c.** 23,45 + 0,01= **e.** 23,45 + 0,001=

b. 5,283 - 0,1= **d.** 5,283 - 0,01= **f.** 5,283 - 0,001=

3. Sin hacer los cálculos, ¿en cuáles creés que se modificará la parte entera? (Ayudita: el segundo número de cada cálculo siempre es menor que 1)

a. 22,2 + 0,2 **f.** 26,44 + 0,55

b. 1,6 + 0,6 **g.** 2,2 - 0,2

c. 2,53 + 0,47 **h.** 1,6 - 0,7

d. 234,77 + 0,66 **i.** 234,19 - 0,09

e. 4,98 + 0,99 **j.** 4,58 - 0,8

4. Intentá hacer estos cálculos mentalmente:

a. 3,7 + 1,5 =

b. 8,92 + 3,47 =

c. 65,78 - 1,87 =

d. 2,43 + 1,6 =

e. 152,55 - 49,75 =

f. 8,89 - 1,9 =

5. Sin hacer la cuenta, decidí si:

a. 6,66 + 3,33 dará más o menos que 10.

b. 6,66 - 2,22 dará más o menos que 4.

c. 4,22 + 3,88 dará más o menos que 8

d. 33 - 3,33 dará más o menos que 30.

e. Comprobá con calculadora y, si te equivocaste en algún cálculo, tratá de explicar cuál fue el error.

En los **problemas 6** y **7** no se espera que las y los estudiantes utilicen multiplicaciones sino estrategias ligadas a la suma. Para el **problema 7**, particularmente, podrían usar la estrategia de buscar un número que sumado dos veces permita dar el número propuesto; para ello podrían probar, comprobar el resultado obtenido y cambiar si es necesario. Es posible que ante esta estrategia prueben primero tratando con la parte entera por un lado y la parte decimal por otro, lo que en algunos casos da un resultado válido, pero no en todos. Será necesario entonces poner en discusión o debate estas limitaciones y alcanzar conclusiones que, como venimos señalando, conviene que queden registradas en afiches y carpetas, como por ejemplo “si la parte entera es par su mitad no afectará a la parte decimal, pero si es impar sí modificará a la parte decimal” o “la mitad puede tener más cifras decimales que el número, por ejemplo la mitad de 1,5 es 0,75".

6. a. Calculá mentalmente y anotá el doble de cada número:

3,4	2,6
5,8	2,5

b. Comprobá con calculadora y, si te equivocaste en algún cálculo, tratá de explicar cuál fue el error.

7. a. Calculá mentalmente y anotá la mitad de cada número:

8,6	9,5
4,8	5,7
6,5	7,4

b. Comprobá con calculadora y, si te equivocaste en algún cálculo, tratá de explicar cuál fue el error.

Para finalizar reflexionando con toda la clase, se ofrecen los siguientes consignas:

Para pensar y explicar entre todas y todos

Escriban un método para encontrar mentalmente la mitad de 4,5 y la mitad de 5,4.

Escriban un método para encontrar mentalmente el doble de 7,4 y el doble de 9,6.

Escriban cómo le explicarían a una compañera o a un compañero que no estuvo en la clase, cómo darse cuenta cuál de los siguientes números es mayor: ¿2,15 ó 2,2?
